Normes dans $\mathbb{R}^n$ et limites

Les exercices ou les questions marqués d'une étoile ne sont pas prioritaires.

1 Normes et distances sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1. (Équivalence des normes usuelles) Démontrer que les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Exercice 2. (Une norme plus exotique) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels fixés avec $a \neq 0$. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N_{a,b}(x, y) = \max\{|bx + y|, |(a + b)x + y|\}.$$

1. Montrer que l'application $N_{a,b} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule unité dans le cas où $(a, b) = (1, 0)$. *Indication : montrer que* $N_{1,0}(x, y) \leq 1$ *ssi* $-1 \leq y \leq 1$ *et* $-1 \leq x + y \leq 1$.

Exercice 3. (Convexité et inégalité triangulaire) Montrer que la boule unité d'un espace vectoriel normé E est un convexe de cet espace. *Indication : une partie* $A \subset E$ *est convexe ssi* $\forall x, y \in A$ *on a* $\{\lambda x + (1 - \lambda)y | \lambda \in [0, 1]\} \subset A$

Exercice 4.* (Distance SNCF) On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On note $O = (0, 0)$ l'origine du plan et on définit

$$d(A, B) = \begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\|_2, & \text{si les points } A,\ B \text{ et } O \text{ sont alignés} \\ \|\overrightarrow{OA}\|_2 + \|\overrightarrow{OB}\|_2, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner l'ensemble des points situés à distance inférieure à 3 du point $C = (2, 0)$.
3. On considère la suite $u = (1, \frac{1}{m+1})_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que u converge vers $\ell = (1, 0)$ pour la norme 2 mais que la suite $d(u_m, \ell)$ ne tend pas vers 0 quand $m \to +\infty$.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$ pour tout $A, B \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 5.* (Inégalités de Hölder et de Minkowski) . Soit $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour $(x, y) \in [0, +\infty[^2$, $xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$. *Indication : étudier le minimum de la fonction* $x \mapsto \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - yx$ *pour* $x \geq 0$
2. En déduire que $\forall (a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q\right)^{1/q}$$

3. En déduire que $\forall (a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 6.* (Les normes N_p) Soit $p \in [1, +\infty[$, pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit $N_p(x) = (\sum_{k=1}^n |x_k|^p)^{1/p}$.

1. Montrer que $\forall p \geq 1$, N_p est une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Dessiner les boules unités de $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $p = 1, 3/2, 2, 5, +\infty$.
3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, $\lim_{p\to+\infty} N_p(x) = \max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} = N_\infty(x)$.
4. Montrer que si $0 < p < 1$, N_p n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^n$ (si $n \geq 2$).

2 Limites de suites

Exercice 7. Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous et déterminer des sous-suites convergentes en fonction des paramètres réels a, b et c

1. $u_n = \left(\frac{(-1)^n}{n^a}, \frac{1}{n^b}, c^n\right)$
2. $u_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a}, \sum_{k=1}^n \frac{b^k}{k!}, c\right)$
3. $u_n = \left(\sum_{k=1}^n a^k, \sum_{k=1}^n a^{2k}, \sum_{k=1}^n a^{3k}\right)$

3 Ouverts et fermés des espaces vectoriels normés $\mathbb{R}^n$

Exercice 8. (Ouvert ou fermé) Dessiner et déterminer la nature (ouvert ou fermé) du domaine de définition des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x, y) = \frac{\ln(x)+\ln(y)}{x-y}$.
2. $f(x, y) = \ln\left((16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\right)$

3.* $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2-y}}$

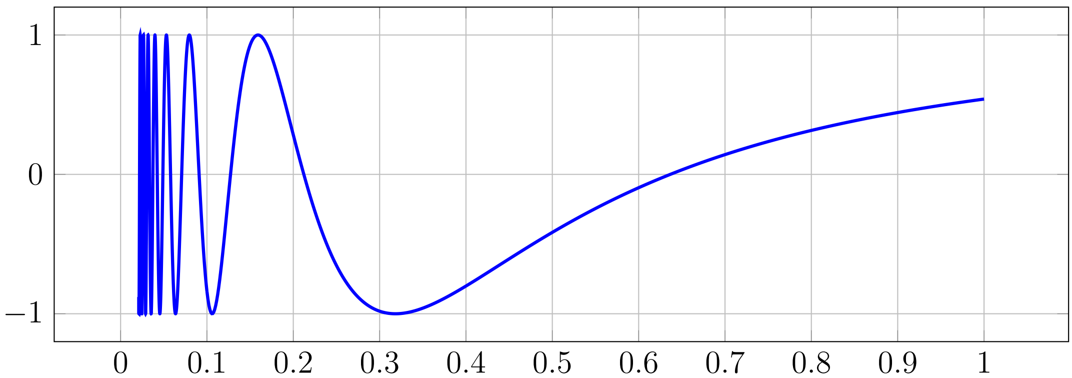
4.* $f(x, y) = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$

Exercice 9. (Stabilité par intersection finie) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'une intersection infinie d'ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement un ouvert. Qu'en est-il pour les parties fermées de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 10. (Adhérence) Dessiner l'adhérence des ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 < 1\}$
2. $C = \{\frac{t}{t+1}(\cos(t), \sin(t)), t > 0\}$

3.* $B = \{(t, \cos(1/t)) \in \mathbb{R}^2 | t > 0\}$



4.* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], y \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]\}$